

Олимпиада школьников «Ломоносов»

Заключительный этап 2025/26 учебного года по математике

5–6 классы

Задача 1. Вовочка записал на доске два трёхзначных числа, которые получаются друг из друга перестановкой цифр в обратном порядке, перемножил их и получил число, заканчивающееся на два нуля. Какое число мог получить Вовочка? Перечислите все возможные варианты. Число не может начинаться с нуля.

Ответ: 157300, 222700, 388800, 435600

Решение. Заметим, что произведение чисел делится на 100, но ни одно из них не делится на 10 (так как они не могут заканчиваться на 0). Значит, одно из них (допустим, первое) делится на 25, а второе — на 4. Тогда первое число имеет вид $*25$ или $*75$. Отсюда получаем, что второе число может быть равно 524, 528, 572 или 576.

Задача 2. Галя кормила птиц. У нее был хлеб и семечки – всего 200 граммов корма. Птица наедается, если съедает 27 граммов хлеба, или 9 граммов семечек, или же их смесь в той же пропорции (то есть если заменить в съеденном птицей каждый грамм семечек на три грамма хлеба, в сумме получится 27 грамм). Птиц было столько, что все наелись, а корма не осталось. Галя не успела сосчитать всех птиц: она досчитала до 21, и все разлетелись. Сколько было птиц?

Ответ: 22

Решение. Данным количеством корма можно накормить от $200/27$ до $200/9$ птиц. Причем число птиц должно быть целым, а в указанном промежутке лежат целые числа от 8 до 22 включительно. По условию задачи птиц больше, чем 21, а значит, их 22.

Задача 3. Мальчик Бартоломей взялся на спор перейти улицу по пешеходному переходу как можно более медленно. По правилам спора он не может нарушать правила дорожного движения (то есть ему нельзя переходить на красный цвет светофора, и улицу он должен успеть перейти, пока горит зелёный) — а ещё он должен всё время идти с постоянной скоростью.

Бартоломей стоит в 50 метрах от перехода, ширина перехода — 20 метров. В момент начала движения светофор загорелся красным для пешеходов. Светофор горит красным по 20 секунд и зелёным по 40 секунд. С какой наименьшей скоростью Бартоломей сможет перейти улицу по всем правилам?

Ответ: $\frac{7}{12}$

Решение. Для того, чтобы успешно перейти дорогу, нужно, во-первых, успеть подойти к переходу, пока на нём горит зелёный, и, во-вторых — успеть перейти, пока зелёный не погас. Ещё нужно учесть, на какой именно «по счёту» зелёный свет успел наш Бартоломей.

Итак, если он успел перейти дорогу, пока зелёный горел в первый раз, то на то, чтобы пройти 50 метров до дороги, у него ушло не меньше 20 секунд (иначе бы он прибыл к переходу, пока ещё горит красный), а на то, чтобы дойти до дороги и перейти её ($50+20 = 70$ м), у него было не больше чем $20+40 = 60$ секунд (потом зелёный гаснет). То есть его скорость меньше $\frac{50}{20}$ м/с, но больше $\frac{70}{60}$ м/с. Так как $\frac{5}{2} > \frac{7}{6}$, скорости в этом диапазоне есть, и перейти дорогу с ними можно.

Забываем про полученные ограничения. Если же он успел перейти дорогу ко второму разу, то на 50 метров до перехода он потратил не меньше $20+40+20 = 80$ секунд (иначе бы он пришёл к переходу на красный, или когда зелёный горел в первый раз), а на дорогу вместе с переходом ($50+20 = 70$ м) потратил не более чем $20+40+20+40 = 120$ секунд. Значит, аналогично, возможные скорости окажутся в диапазоне между $\frac{5}{8}$ и $\frac{7}{12}$. Действительно, $\frac{5}{8} > \frac{7}{12}$, и наименьшая возможная скорость, пока что, равна $\frac{7}{12}$.

А если предположить, что он перешёл дорогу к третьему разу, то окажется, что его скорость будет не больше

$$\frac{50}{20 + 40 + 20 + 40 + 20} = \frac{5}{14},$$

но в то же время не меньше

$$\frac{50 + 20}{20 + 40 + 20 + 40 + 20 + 40} = \frac{7}{18}.$$

Но так как $\frac{7}{18} > \frac{5}{14}$, никакой такой скорости мы не найдём, и к третьему (аналогично, и к четвёртому, пятому и т.д.) разу перейти дорогу уже не получится.

Значит, про скорость v можно сказать так — либо $\frac{7}{6} \leq v \leq \frac{5}{2}$, либо $\frac{7}{12} \leq v \leq \frac{5}{8}$, и наименьшая возможная скорость равна $\frac{7}{12}$.

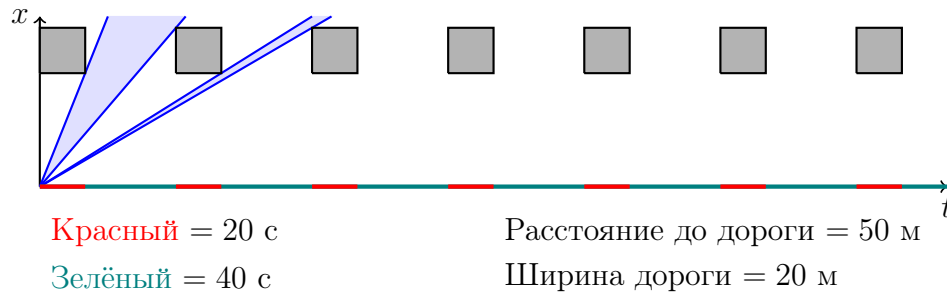


Иллюстрация — на рисунке изображены возможные способы, которыми можно было бы перейти дорогу. По вертикали отложено пройденное расстояние, по горизонтали — время. Серые квадраты — моменты, когда светофор блокирует переход.

Задача 4. Найдите, с какими цифрами a и b будет верно равенство

$$\overline{aabb} = (\overline{aa})^2 + (\overline{bb})^2.$$

Черта обозначает многозначное число с указанными цифрами. Например, при $x = 1, y = 3, z = 5$ $\overline{xyz} = 135$.

Ответ: $a = 8, b = 3$.

Решение.

$$\overline{aabb} = 1000a + 100a + 10b + b = 1100a + 11b = 11(100a + b) = 11(99a + (a + b)),$$

$$(\overline{aa})^2 + (\overline{bb})^2 = (10a + a)^2 + (10b + b)^2 = 121(a^2 + b^2).$$

Правая часть равенства делится на 121, значит, и левая должна делиться. 11 в разложении левой части уже есть, значит, остаётся чтобы $99a + (a + b)$ делилось на 11. Так как $99a$ на 11 делится, остаётся потребовать, чтобы $a + b$ делилось на 11. Больше того, так как a и b — цифры, то значит, что $a + b = 11$, прочие кратные 11 числа получить в сумме не получится.

Используя $a + b = 11$, перепишем равенство так:

$$11(99a + (a + b)) = 121(a^2 + b^2)$$

$$11(99a + 11) = 121(a^2 + b^2)$$

$$9a + 1 = a^2 + b^2.$$

Значит, остаётся найти решения системы

$$\begin{cases} a + b = 11, \\ 9a + 1 = a^2 + b^2. \end{cases}$$

Решать можно хоть перебором, получится $a = 8, b = 3$.

Задача 5. На девяти цветках сидели 9 бабочек. В некоторый момент все они взлетели и перелетели на ближайший к ним цветок. Докажите, что при этом останется цветок без бабочки. (Расстояния между всеми цветками различны.)

Ответ:

Решение.

1) Докажем, что если на одном из цветков окажется хотя бы две бабочки, то на каком-то из других 8 цветков не будет ни одной бабочки. «От противного.» Если на каждом из оставшихся цветков есть хотя бы по одной бабочке, то всего бабочек не меньше, чем 10: (2 бабочки на первом цветке) + (по одной бабочке на оставшихся 8 цветках) = 10 бабочек, но бабочек всего 9 — противоречие.

2) Отметим, что, если взять два цветка на наименьшем расстоянии друг от друга, то сидящие на них бабочки обменяются цветками (потому что первый из этих цветков будет ближайшим ко второму, а второй — ближайший к первому). Если ещё какая-то бабочка перелетит на один из этих двух цветков, то на нём окажется хотя бы 2 бабочки. (см. 1)) Если же ни одна из оставшихся бабочек не перелетит ни на один из этих двух цветков, это значит, что бабочки на оставшихся семи цветках перелетают на ближайший цветок среди этих семи — тогда для этих семи цветков получаем ту же задачу, но уже с семью цветками и семью бабочками.

Повторим так три раза и получим задачу с тремя цветками и тремя бабочками. В этом случае два цветка на наименьшем расстоянии друг от друга обменяются бабочками, а бабочка с третьего цветка перелетит на один из этих двух, после чего на третьем цветке не останется бабочки.

Задача 6. Живущий в 28 веке робот-архивист Колеглай нашёл дневник мальчика Олега 21 века, последняя запись которого приходилась на 23 июня. Колеглай заметил, что если возьмёт свой возраст, умножит на номер месяца последней записи Олега, прибавит день последней записи Олега, а потом умножит всё на век, в котором писался дневник Олега — получится в точности тот год, который сейчас на дворе. Колеглай тоже вёл дневник, и так в него всё и записал.

В 33 веке на дневник Колеглая наткнулся кибернетический историк Никокласус. Правда, время не пощадило исторический источник — в записях получилось различить, что запись Колеглая пришлась на 27?1 год. Своего возраста Колеглай тоже нигде не указал.

Помогите Никокласусу восстановить год записи Колеглая и узнать возраст Колеглая.

Ответ: Робота 18 лет, запись была 2751 года.

Решение. Составим уравнение: X это возраст робота, а y — выпавшая из года цифра. Тогда:

$$(X \cdot 6 + 23) \cdot 21 = \overline{27y1}.$$

Значит, неизвестный нам год делится на 21, то есть на 3 и на 7. На 3 делятся года 2721, 2751, 2781 (по признаку делимости на 3), а из них на 7 делится только 2751. Остаётся найти $X = 18$.